Binarne operacije i algebarske strukture

* Binarna operacija je svako preslikavanje $* : \underbrace{G \times G}_{G^2} \to G$

$(x, y) \in G$; $\underbrace{*(x, y)}_{x * y} = z$

$+(5, 6) = 11$; $+ : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$

$5 + 6 = 11$

$(G, *)$ - Algebarska struktura

* Osobine (definicije):

- Skup G je zatvoren u odnosu na operaciju $*$ ako za $(\forall x, y \in G)$ $x * y \in G$
- Operacija $*$ je asocijativna u G ako za $(\forall x, y, z \in G)$ $(x * y) * z = x * (y * z)$
- Ako $(\exists e \in G)(\forall x \in G)$ $x * e = e * x = x$ onda je e <u>neutralni ili jedinični element</u>.
- Ako je $x * x' = x' * x = e$ onda je x' suprotni (inverzni) element, elementa x.
- Operacija $*$ je komutativna u skupu G ako za $(\forall x, y \in G)$ $x * y = y * x$

$(G, *)$ je GRUPOID ako je skup G zatvoren u odnosu na operaciju $*$.

$(G, *)$ je <u>POLUGRUPA</u> (SEMIGRUPA) ako je G zatvoren i asocijativan u odnosu na $*$.

POLUGRUPA sa jedinicom - jedinični element.

$(G,*)$ je GRUPA - zatvorena, asocijativnost, ima neutralni el., i svaki el. ima inverzni.
$(G,*)$ je ABELOVA GRUPA ako je GRUPA i vrijedi komutativnost

1. Šta predstavljaju sljedeće algebarske strukture?

$(\mathbb{N},+)$; $(\mathbb{N},\cdot)$; $(\mathbb{Z},+)$; $(\mathbb{N},-)$; $(\mathbb{Z},-)$; $(\mathbb{Q},\cdot)$; $(\mathbb{Q}\setminus\{0\},\cdot)$

$(\mathbb{N},+)$ zatvorena ✓
asocijativna ✓
nema neutralni el.
komutativna ✓
$\Rightarrow$ Komutativna polugrupa

$(\mathbb{N},\cdot)$ zatvoren, asoc., $\exists$ neutralni el.
$(\exists e\in\mathbb{N})(\forall x\in\mathbb{N})\ x\cdot e=e\cdot x=1$
$\tau=\left((\forall x\in\mathbb{N})(\exists x'\in\mathbb{N})\ x\cdot x'=x'\cdot x=1\right)=\perp$
komutativna;
$\Rightarrow$ Komutativna polugrupa sa jedinicom

$(\mathbb{Z},+)$ zatvoren, asoc., neutralni el. $e=0$;
$(\forall x\in\mathbb{Z})(\exists x'\in\mathbb{N})\ x\cdot x'=x'\cdot x=0$ i to je $-x$
komutativna;
$\Rightarrow$ Abelova grupa

$(\mathbb{N},-)$ nije zatvoren skup u odnosu na $-$

$\cancel{x-y}=x+(-y)$

$(\mathbb{Z}, -)$ zatvoren; nije asocijativna $(x-y)-z \neq x-(y-z)$
$e=0$; $x'=x$; nije komut. $x-y \neq y-x$
$\Rightarrow$ Grupoid

$(\mathbb{Q}, \cdot)$ zatvoren; asoc.; $e=1$; svi imaju inverzni osim nule $\Rightarrow$ nema inverznog el.; komutativna
$\Rightarrow$ Komutativna polugrupa sa jedinicom

$+ : e=0$ neutralni el.
$\cdot : e=1$ jedinični (neutralni)

$(\mathbb{Q}\setminus\{0\}, \cdot)$ Abelova grupa

2. Na skupu $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ definisana je operacija „$\circ$" sa: $x \circ y = \frac{x \cdot y}{2}$. Provjeriti da li je $(\mathbb{R}\setminus\{0\}, \circ)$

1) zatvorenost skupa $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ u odnosu na „$\circ$"

$$x \circ y = \frac{x \cdot y}{2} \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \checkmark$$

2) asoc. $(\forall x, y, z \in \mathbb{R}\setminus\{0\})\ (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$

$$(x \circ y) \circ z = \left(\frac{xy}{2}\right) \circ z = \frac{\frac{xy}{2} \cdot z}{2} = \frac{xyz}{4}$$

$$x \circ (y \circ z) = x \circ \left(\frac{y \cdot z}{2}\right) = \frac{x \cdot \frac{yz}{2}}{2} = \frac{xyz}{4}$$

3) $(\exists e \in \mathbb{R}\setminus\{0\})\ x \circ e = e \circ x = x$

$e \circ x = x$

$\frac{e \cdot x}{2} = x \overset{e \cdot x = 2x}{\Rightarrow} e = 2$

$x \circ 2 = x$

$\frac{x \cdot 2}{2} = x \checkmark$

4) $(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})(\exists x' \in \mathbb{R}\setminus\{0\}) \quad x \circ x' = x' \circ x = 2$

$x' \circ x = 2$

$\frac{x' \cdot x}{2} = 2 \quad \Rightarrow \quad x' = \frac{4}{x};$

$x \circ x' = 2$

$\frac{x \cdot \frac{4}{x}}{2} = 2$ ✓

$\Rightarrow (\mathbb{R}\setminus\{0\}, \circ)$ je GRUPA

3. Na skupu $\mathbb{R}$ definisana je operacija $*$ na sljedeći način: $x * y = xy + x + y$. Da li je struktura $(\mathbb{R}, *)$ grupa, ako nije za koji element $a \in \mathbb{R}$ biti grupa $(\mathbb{R}\setminus\{a\}, *)$?

1) $(\forall x, y \in \mathbb{R}) \quad x * y \in \mathbb{R}$

$x * y = xy + x + y \in \mathbb{R}$ ✓

2) asoc. $(\forall x, y, z \in \mathbb{R}) \quad (x*y)*z = x*(y*z)$

$(x*y)*z = (xy + x + y) * z = (xy + x + y)\cdot z + (xy + x + y) + z$

$= xyz + xz + yz + xy + x + y + z$

$x * (y * z) =$

✓

3) $(\exists e \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}) \quad x * e = e * x = x$

$e * x = x$ | $x * e = x$

$ex + x + e = x$ | $x * 0 = x$

$ex + e = 0$ | $x \cdot 0 + x + 0 = x$ ✓

$e(x+1) = 0 \quad \Rightarrow e = 0$

4) $(\forall x\in\mathbb{R})\ (\exists x'\in\mathbb{R}):\ x' * x = x * x' = 0$

$x * x' = 0$

$xx' + x + x' = 0$

$x'(x+1) = -x$

$x' = \frac{-x}{x+1}$ $\quad x+1\neq 0 \Rightarrow x\neq -1$ $\quad$ i to bi bio inv. el. svih el. a ostaje problematičan $x=-1$

$x=-1$? $\quad x'\cdot 0 = 1 \quad 0 = 1 \Rightarrow -1$ nema svog inverznog el.

$(\mathbb{R}, *)$ nije grupa.

$a=-1 \Rightarrow (\mathbb{R}\setminus\{-1\}, *)$ je grupa (komutativna).

4. Dat je skup od 4 realne f-je:

$S = \{f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x)\}$

$f_1(x) = -x,\ f_2(x) = \frac{1}{x},\ f_3(x) = x,\ f_4(x) = -\frac{1}{x}$

Da li je struktura $(S, \circ)$ grupa, gdje je „$\circ$" operacija kompozicija fja?

$|S| = 4;\quad |S\times S| = 16$

U slučaju konačnog skupa preporučljivo je ispisati sve moguće rezultate u tzv. Kejlijevoj tablici.

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_3	f_4	f_1	f_2
f_2	f_4	f_3	f_2	f_1
f_3	f_1	f_2	f_3	f_4
f_4	f_2	f_1	f_4	f_3

$(f_2\circ f_4)(x) = f_2(f_4(x)) = f_2\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{-\frac{1}{x}} = -x$

$= f_1$

1) $(\forall f, g \in S)$ $f \circ g \in S$ ✓ – vidimo iz tablice (svi mogući rezultati su iz skupa S)

2) asoc. $(\forall f, g, h \in S)$ $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ ✓

Poznata osobina kompozicija fja: Kompozicija fja je asocijativna

3) $(\exists e \in S)(\forall f \in S)$ $e \circ f = f \circ e = f$

$f_3 \circ f = f$ – na osnovu toga što je f_3 vrsta ista kao polazna

$f \circ f_3 = f$ – f_3 kolona ista kao polazna

$e = f_3$ $\quad e(x) = x$

4) $(\forall f \in S)(\exists f' \in S)$ $f \circ f' = f' \circ f = f_3$

$f_1 \circ f_1 = f_1 \circ f_1 = f_3 \Rightarrow f_1' = f_1$

$f_2' = f_2,\ f_3' = f_3,\ f_4' = f_4$

$\Rightarrow (S, \circ)$ je grupa

5. $S = \{(1, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$ i neka je na S definisana operacija „$*$" sa: $(1, a) * (1, b) = (\alpha, a + b + 1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

a) Odrediti vrijednost α tako da S bude zatvoren u odnosu na $*$.

b) Za dobijenu vrijednost parametra α pokazati da je $(S, *)$ grupa.

a) 1) $\alpha = 1$ w prva komponenta obavezno 1

b) 2) asoc $(\forall (1,a),(1,b),(1,c) \in S)$

$$[(1,a)*(1,b)]*(1,c) = (1,a)*[(1,b)*(1,c)]$$

$$[(1,a)*(1,b)]*(1,c) = (1,a+b+1)*(1,c)$$
$$= (1, a+b+1+c+1)$$
$$= (1, a+(b+c+1)+1) = (1,a)*(1,b+c+1)$$
$$= (1,a)*[(1,b)*(1,c)]$$

3) $(\exists e \in S)(\forall (1,a) \in S)\ (1,k)*(1,a) = (1,a)*(1,k) = (1,a)$

$$(1,a)*(1,k) = (1,a)$$
$$(1, a+k+1) = (1,a)$$
$$a+k+1 = a \Rightarrow k = -1$$
$$\Rightarrow e = (1,-1)$$

treba provjeriti i drugi dio

4) $(\forall (1,a) \in S)(\exists (1,a)' \in S)\ (1,a)*(1,a') = (1,a')*(1,a) = (1,-1)$

$$(1,a') ;\ (1,a)*(1,a') = (1,-1)$$
$$(1, a+a'+1) = (1,-1)$$
$$a+a'+1 \Rightarrow a' = -2-a$$
$$\Rightarrow (1,a)' = (1,-a-2)$$

6. Ako je $(G,\circ)$ Abelova grupa, riješiti jednačinu $a \circ (x \circ x) = b \circ x$.

$a \circ x \circ x = b \circ x$ — radi asoc. brišemo zagrade $/ \circ x'$

$$a \circ x \circ \underbrace{x \circ x'}_{e} = b \circ \underbrace{x \circ x'}_{e}$$

$a \circ x = b \quad / a' \circ$

$$a' \circ a \circ x = a' \circ b \Rightarrow x = a' \circ b$$

$(G, \circ)$ - apstraktno (alg. struktura

$G = \mathbb{R}$, $\circ \equiv +$ - konkretno

$a + x + x = b + x$

$a + x = b$:

$x = b - a = -a + b$

D.Z.

7. Neka je $P(A)$ partitivni skup skupa A (neprazan skup)
Provjeriti da li su skupovi:
$(P(A), \cup)$, $(P(A), \cap)$ Abelove grupe.

a) $(P(A), \cup)$

1) $(\forall x, y \in P(A))$ $x \cup y \in P(A)$

$x \subset A$, $y \subset A$, $x \cup y \subset A$

2) $(\forall x, y, z \in P(A))$ $(x \cup y) \cup z = x \cup (y \cup z)$ ← poznata osobina
zamijeni se sa iskazom $(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$ pa tablica...

3) $(\exists E \in P(A))$ $(\forall x \in P(A))$ $E \cup X = X \cup E = X$

$\Rightarrow E = \emptyset$

nema inverznih 4) $(\forall x \in P(A))$ $(\exists x' \in P(A))$ $x \cup x' = x' \cup x = \emptyset$ ne važi jer je $A \neq \emptyset$

npr. $A \cup A' = \emptyset$ nema rješenja po A'

$\Downarrow$

$(P(A), \cup)$ nije Abelova grupa

$A = \emptyset$, $P(A) = \{\emptyset\}$

$|A| = n$; $|P(A)| = 2^n$

$(P(A), \cup)$ - komutativna polugrupa sa ~~jedinicom~~ neutralnim el.

b) $(P(A), \cap)$

1) $(\forall x, y \in P(A))\ x \cap y \in P(A)$

$x \subset A,\ y \subset A,\ x \cap y \in A$

2) $(\forall x, y, z \in P(A))\ (x \cap y) \cap z = x \cap (y \cap z)$ poznata osobina

$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$ ✓

3) $(\exists E \in P(A))\ (\forall x \in P(A))\ E \cap x = x \cap E = x$

~~$E = x \quad x \cap x = x$~~ $\Rightarrow E = A \quad (A \cap X = X)$

4) $(\forall x \in P(A))\ (\exists x' \in P(A))\ x \cap x' = x' \cap x = A$

ne važi jer $\emptyset$ nema svoj inverzni skup $(x \cap \emptyset = x)$

5) $(\forall x, y \in P(A))\ x \cap y = y \cap x$ ✓ poznata osobina

$(P(A), \cap)$ je komutativna polugrupa sa jedinicom (neutralni el. je A)

D.Z.
8. Da li je $(\mathbb{R}, \circ)$ grupa ako je „$\circ$" operacija definisana sa: a) $x \circ y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}\ (\forall x, y \in \mathbb{R})$ hoće

b) $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ x \circ y = \sqrt{x^2 + y^2}$ neće

Uopštiti!

9. Binarne operacije $*$ i $\circ$ su definisane na $\mathbb{R}^2$ sa: $(a, b) * (c, d) = (a + c, b + d)$

$(a, b) \circ (c, d) = (ac, ad + bc)$

Dokazati da je $(\mathbb{R}^2, *, \circ)$ komutativni prsten sa jedinicom.

a) $(\mathbb{R}^2, *)$ treba biti Abelova grupa:

1) za $(\forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2)\ \underbrace{(a, b) * (c, d)}_{(a+c,\ b+d)} \in \mathbb{R}^2$ ✓

2) asoc. $(\forall (a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{R}^2)$

$[(a, b) * (c, d)] * (e, f) = (a, b) * [(c, d) * (e, f)]$ ✓ (D.Z.)

3) $(\exists e=(e_1,e_2)\in\mathbb{R}^2)(\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2)$

$(a,b)*(e_1,e_2)=(e_1,e_2)*(a,b)=(a,b)$

$\Rightarrow (e_1,e_2)=(0,0) \quad \Rightarrow e=(0,0)$

4) $(a,b)'=(-a,-b) \quad \forall a,b\in\mathbb{R}^2$ (DZ)

5) kom. ✓ (DZ)

b) $(\mathbb{R}^2,\circ)$ - komutativna polugrupa sa jedinicom

1) zatvorenost ✓ $(\forall(a,b)(c,d)\in\mathbb{R}^2)\ (a,b)\circ(c,d)=(ac,ad+bc)\in\mathbb{R}^2$

2) asoc. $(\forall(a,b),(c,d),(e,f)\in\mathbb{R}^2)$

$[(a,b)\circ(c,d)]\circ(e,f)=(a,b)\circ[(c,d)\circ(e,f)]$

$(ac,ad+bc)\circ(e,f)=(a,b)\circ(ce,cf+de)$

$(ace,acf+(ad+bc)e)=(ace,a(cf+de)+bce)$ ✓

$(\mathbb{R},+,\cdot)$ je polje pa vrijedi $\cdot,+$

3) $(a,b)\circ(e_1',e_2')=(a,b)$

$(ae_1',ae_2'+be_1')=(a,b)$

$e_1'=1 \quad e_2'=0 \Rightarrow e'=(1,0)$ za $\forall a,b\in\mathbb{R}^2$

5) kom. ✓ (DZ)

c) distr. $\circ$ prema $*$

lijeva: $(a,b)\circ[(c,d)*(e,f)]=[(a,b)\circ(c,d)]*[(a,b)\circ(e,f)]$

$(a,b)\circ(c+e,d+f)=(ac,ad+bc)*(ae,af+be)$

$(a(c+e),a(d+f)+b(c+e))=(ac+ae,ad+bc+af+be)$ ✓

desna: $[(c,d)*(e,f)]\circ(a,b)=[(c,d)\circ(a,b)]*[(e,f)\circ(a,b)]$

Da važi desna distributivnost $\Rightarrow$ iz lijeve dist. i komutativnosti operacije $\circ$!

$[(c,d)*(e,f)]\circ(a,b)\overset{k}{=}(a,b)\circ[(c,d)*(e,f)]\overset{LD}{=}$

$= [(a,b)\circ(c,d)] * [(a,b)\circ(e,f)] = [(c,d)\circ(a,b)] * [(e,f)\circ(a,b)]$

10. Dat je skup matrica M oblika $\begin{bmatrix} a & b \\ 2b & a \end{bmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$
Dokazati da je skup M u odnosu na operacije sabiranja i množenja prsten, ali ne i polje!

a) $(M,+)$ Abelova grupa:

1) zatv. $\left(\forall \begin{bmatrix} a & b \\ 2b & a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c & d \\ 2d & c \end{bmatrix} \in M\right)$ treba provjeriti:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 2b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & d \\ 2d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ 2(b+d) & a+c \end{bmatrix} \in M \ \checkmark$$

2) asoc. (Sabiranje matrica je asocijativna operacija pa se ta asoc. prenosi iz skupa svih kvadratnih mat. drugog reda) $\checkmark$

3) $e = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M$

4) $\begin{bmatrix} a & b \\ 2b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a' & b' \\ 2b' & a' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow a' = -a$
$b' = -b$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ 2b & a \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -a & -b \\ 2(-b) & -a \end{bmatrix} \in M$

5) kom. $\checkmark$ (Sabiranje matrica je komutativno)

b) $(M,\cdot)$

1) zat. $\begin{bmatrix} a & b \\ 2b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & d \\ 2d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac+2bd & ad+bc \\ 2bc+2ad & 2bd+ac \end{bmatrix} \in M$

2) asoc. (Množenje kvadratnih matrica istog reda je asoc.) $\checkmark$

3) $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in M$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2\cdot 0 & 1 \end{bmatrix}$

4) $\left(\forall \begin{bmatrix} a & b \\ 2b & a \end{bmatrix} \in M \setminus \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \exists \begin{bmatrix} a & b \\ 2b & a \end{bmatrix}' \in M$

bez neutralnog el. za 1. operaciju

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 2b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ 2b & a \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\det \begin{bmatrix} a & b \\ 2b & a \end{bmatrix} = a^2 - 2b^2$ npr. $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 2 \cdot 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \notin M$

Nema svaki el. svoj inverzni zato nije polje.

5) komu. (Množenje matrica nije komutativno - nije tačno da je za svake 2 mat. da je množenje kom., ali ne mora da znači da nije na manjem skupu.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 2b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & d \\ 2d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac+2bd & ad+bc \\ 2(ad+bc) & ac+2bd \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c & d \\ 2d & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ 2b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac+2bd & bc+ad \\ 2ad+2bc & 2bd+ac \end{bmatrix}$$ ✓

6) distributivnost (za $\forall$ 3 kvadratne mat. drugog reda A, B, C važi $A(B+C) = AB+AC$
$(B+C)A = BA+CA$

pa važi i za matrice iz M) ✓

D.Z.

(11) U skupu $\mathbb{R}^2$ su uvedene operacije $\circ, *$ sa:

$(a,b) \circ (c,d) = (a+c+1, b+d)$

$(a,b) * (c,d) = (ac-bd+a+c, bc+ad+b+d)$

Dokazati da je $(\mathbb{R}^2, \circ, *)$ komutativni prsten sa jedinicom.

(12) Neka je M skup svih matrica oblika $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$

Dokazati da je $(M, +, \cdot)$ ima strukturu polja.

13. Neka je M skup svih matrica oblika $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -a & a \end{bmatrix}$, $a \in R$
Ispitati da li $(M, +, \cdot)$ ima strukturu polja?

a) $(M,+)$ da je Abelova grupa

1) zatvorenost $\left(\forall \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -a & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -b & b \end{bmatrix} \in M\right)$ $\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -a & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -b & b \end{bmatrix}}$ $\in M$

$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -(a+b) & a+b \end{bmatrix} \in M$

2) asoc. ✓

3) $E_+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M$

4) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -a & a \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & -a \end{bmatrix} \in M$

5) kom. ✓ (prenosi se iz skupa svih mat. kvadratnog reda)

b) $(M, \cdot)$ $\quad \left(M \setminus \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \cdot\right)$ Abelova grupa

1) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -a & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -b & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -ab & ab \end{bmatrix} \in M$ ✓

2) asoc. ✓

3) $(\exists E_\cdot \in M) \left(\forall \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -a & a \end{bmatrix} \in M\right)$ $E_\cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -a & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -a & a \end{bmatrix} \cdot E_\cdot = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -a & a \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -e & e \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -a & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -a & a \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -ae & ae \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -a & a \end{bmatrix} \Rightarrow e = 1 \Rightarrow E_\cdot = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ ✓

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -a & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -a & a \end{bmatrix}$.

4) $\left(\forall \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -a & a \end{bmatrix} \in M \setminus \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \left(\exists \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -a' & a' \end{bmatrix} \in M \setminus \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$ tako da je

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -a & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -a' & a' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -a' & a' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -a & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}0 & 0\\ -a & a\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & 0\\ -a' & a'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0 & 0\\ -a'a & a'a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}0 & 0\\ -a & a\end{bmatrix}'=\begin{bmatrix}0 & 0\\ -\frac{1}{a} & \frac{1}{a}\end{bmatrix} \Rightarrow a'=\frac{1}{a}$$

5) $\left(\forall \begin{bmatrix}0 & 0\\ -a & a\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\ -b & b\end{bmatrix}\in M\right) \quad \begin{bmatrix}0 & 0\\ -a & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ -b & b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ -b & b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ -a & a\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}0 & 0\\ -ab & ab\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ -ba & ba\end{bmatrix}$ ✓ važi komutativnost.

c) distr. $\cdot$ prema $+$ se prenosi iz $A\cdot(B+C)=AB+AC$

$\Rightarrow (M,+,\cdot)$ je polje

D.Z.

14. Neka je S skup fja: $S=\left\{\frac{ax+b}{cx+d} \mid a,b,c,d\in\mathbb{R} \wedge ad-bc=1\right\}$

i „$\circ$" operacija kompozicije fja. Provjeriti da li je $(S,\circ)$ grupa?

/obratiti pažnju na zatvorenost - uzet 2 fje i napraviti njihovu komp. (rezultat mora biti istog oblika $\frac{ax+b}{cx+d}$ i da važi $ad-bc=1$;

asoc. se prenosi iz komp. fja;

$e=e(x)=x=\frac{1\cdot x+0}{0\cdot x+1}$ $\quad 1\cdot 1-0\cdot 0=1$ ✓ $\Rightarrow e(x)=x\in S$

15. Odrediti sve kvadratne mat. 2. reda koje su komutativne sa ovom matricom: $\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ (u smislu množenja)

$$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2a+b & a+b\\ 2c+d & c+d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2a+c & 2b+d\\ a+c & b+d\end{bmatrix}$$

$2a+b=2a+c$

$a+b=2b+d$

$2c+d=a+c$

$c+d=b+d$

$$\left.\begin{aligned} b-c&=0\\ a-b-d&=0\\ a-c-d&=0\\ b-c&=0 \end{aligned}\right\}$$ sis. nema jedinstveno rj.

$b=c$

$a-b-d=0$

$a-b-d=0$

$b=c$

$a-b-d=0$

$c=b$

$d=a-b$

$\begin{bmatrix} a & b \\ b & a-b \end{bmatrix}$ - sve matrice komutativne sa $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$